软 BCC-代数

彭 家 寅

（内江师范学院 数学与信息科学学院， 四川 内江 641199）

摘 要：引入了软 BCC-代数和 BCC-代数的软子代数的概念，给出了几个实例说明这两个概念. 建立了软 BCC-代数和 BCC-代数的软子代数上的交、并、“和”与“或”运算，研究了软 BCC-代数与软子代数之间的关系，并讨论了它们的同态象之性质.

关键词：软集；软 BCC-代数；软子代数

DOI：10.13603/j.cnki.51－1621/z.2017.08.010

中图分类号：O153 **文献标志码**：A **文章编号**：1671－1785(2017)08－0042－05

0 引言

很久以来，用于处理建模、推理和计算的大多数工具是分明的、确定的和精确的. 然而，在经济、工程、环境、社会学、医学、商业管理等中存在着许多复杂的问题，这些问题所涉及的数据或信息并不总是全部清晰，我们无法成功地使用经典的方法去解决这些含有各种类型的不确定性的问题. 近年来，已提出了一些处理这类系统的有效理论与方法，如概率论、模糊集理论[1]、直觉模糊集理论[2]、Vague 集理论[3]、区间数理论[4]、粗糙集理论[5]等被作为数学工具去处理嵌入在系统中的不同类型的不确定性和不精确性问题. 1999 年，Molodtsov[6]指出，上述所有理论都有其固有的缺陷，其中一个主要的问题是这些理论的参数化的工具不足. 于是，他提出了一个全新的概念，称为软集. 该理论引入了一组参数去处理不确定性和模糊性问题，从而摆脱上述问题所造成的困难.

自 Molodtsov 引入软集的概念以来，引起了人们的广泛关注[7-8]. 一方面，软集理论在函数平滑、黎曼积分、决策、测度理论、博弈论等领域有着丰富的应用. 特别地，软集在决策中的应用已经凸显出来了[7-8]. 另一方面，软集理论也在不断丰富和发展，例如 Chen 等[9]提出了软集参数约简的概念，并且与粗糙集理论中的属性约简的相关概念进行了比较. Jun 等[10]于 2001 年将模糊集理论用于 BCK-代数的结构研究中，Dudek 等[11]把模糊集理论用于研究 BCC-代数的结构问题. 本文将 Molodtsov 提出软集的概念应用到 BCC-代数中，引入软 BCC-代数及其软子代数的概念，研究它们的基本性质.

1 预备知识

所谓 BCC-代数是指满足如下五个条件的一个 (2,0) 型代数 $(X,*,0)$：对任意 $x,y,z\in X$，都有

(1) $((x*y)*(z*y))*(x*z)=0$；

(2) $x*x=0$；

(3) $0*x=0$；

(4) $x*0=x$；

(5)若 $x*y=0$ 且 $y*x=0$，则 $x=y$.

在任意 BCC-代数中，定义一个序关系“$\leqslant$”如

收稿日期：2016-11-17

基金项目：国家自然科学基金(11071178、11671284)，教育部数学与应用数学专业综合改革(ZG0464)，四川省数学与应用数学专业综合改革(01249)，四川省解析几何精品开放课程，内江师范学院 2012 年校级精品资源共享课

作者简介：彭家寅(1962－)，男，四川资中人，内江师范学院教授，博士. 研究方向：模糊数学与人工智能

下：令 $x,y\in X$，

(6) $x\leqslant y\Leftrightarrow x*y=0$.

不难看出，上述定义的序关系是一个偏序关系，元素 0 是为其最小元. 在任何 BCC-代数中，下列结论成立：

(7)若 $x\leqslant y$，则 $x*z\leqslant y*z$ 且 $z*y\leqslant z*x$.

BCC-代数 X 的非空子集 S 叫做 X 的一个子代数，如果对任意 $x,y\in S$，都有 $x*y\in S$. 设 X 和 Y 都是 BCC-代数，称映射 $f:X\to Y$ 为同态映射，如果 $f(x*y)=f(x)*f(y)$ 对任意 $x,y\in X$ 都成立. 对于 BCC-代数的同态映射 $f:X\to Y$，把 $\ker f$ 叫做 f 的核，它是如下集合 $\ker f=\{x\in X\mid f(x)=0\}$.

Molodtsov[6] 按以下方式定义了软集：设 U 为初始论域，E 为一个参数集. 令 $P(U)$ 为 U 的幂集，$A\subset E$.

定义 1.1[6]　有序对 (F,A) 叫做 U 上的一个软集，其中 F 为如下的一个集值函数 $F:A\to P(U)$. 换言之，U 上的一个软集就是论域 U 的子集的参数族. 对 $\varepsilon\in A$，$F(\varepsilon)$ 叫做软集 (F,A) 的 ε-近似的元素集合. 显然，软集并不是一个集合，并且 Molodtsov[6] 给出了几个例子说明了软集这个概念.

定义 1.2[7]　对于同一论域 U 上的两个软集 (F,A) 和 (G,B)，称 (F,A) 为 (G,B) 的一个软子集，记为 $(F,A)\tilde{\subset}(G,B)$，如果(i) $A\subset B$，(ii) 对任意 $e\in A$，有 $F(e)=G(e)$.

定义 1.3[12]　论域 U 上的两个软集 (F,A) 和 (G,B) 的并是 U 上的一个软集 (H,C)，其中 $C=A\cup B$ 并且 $\forall e\in C$，有

$$H(e)=\begin{cases}F(e),\ \text{if } e\in A\backslash B,\\ G(e),\ \text{if } e\in B\backslash A,\\ F(e)\cap G(e),\ \text{if } e\in A\cap B.\end{cases}$$

记此交为 $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$.

注　Xu 等[12] 指出 Maji 等提出的关于软集交定义可能会产生一些矛盾，于是给予了重新定义.

定义 1.4[7]　论域 U 上的两个软集 (F,A) 和 (G,B) 的并是 U 上的一个软集 (H,C)，其中 $C=A\cup B$ 且对任意 $e\in C$，

$$H(e)=\begin{cases}F(e),\ \text{if } e\in A\backslash B,\\ G(e),\ \text{if } e\in B\backslash A,\\ F(e)\cup G(e),\ \text{if } e\in A\cap B.\end{cases}$$

把该并记为 $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$.

定义 1.5[7]　若 (F,A) 和 (G,B) 都是论域 U 上的软集，将“(F,A) 和 (G,B)”，记为 $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$，定义为 $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$，其中 $H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cap G(\beta)$ 对任意 $(\alpha,\beta)\in A\times B$ 成立.

定义 1.6[7]　若 (F,A) 和 (G,B) 都是论域 U 上的软集，将“(F,A) 或 (G,B)”，记为 $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)$，定义为 $(F,A)\tilde{\vee}(G,B)=(H,A\times B)$，其中 $H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cup G(\beta)$ 对任意 $(\alpha,\beta)\in A\times B$ 成立.

2　软 BCC-代数

下文中，总假定 X 为 BCC-代数，A 为非空集合. R 为 A 到 X 上的任一关系，即 R 为 $A\times X$ 的一个子集. 定义集值映射 $F:A\to P(X)$ 为：对任意 $x\in A$，$F(x)=\{y\in X\mid xRy\}$，则有序对 (F,A) 为 X 上的一个软集.

定义 2.1　设 (F,A) 为 X 上的一个软集，称 (F,A) 为 X 上的一个软 BCC-代数，如果对任意 $x\in A$，$F(x)$ 都是 X 的子代数.

例 2.1　设 $X=\{0,1,2,3,4\}$ 为一个 BCC-代数，其 Cayley 如表 1 所示.

表 1　X 上关于 $*$ 的运算

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1
2	2	2	0	2	2
3	3	3	3	0	3
4	4	4	4	4	0

设 (F,A) 为 X 上的一个软集，其中 $A=X$，集值函数 $F:A\to P(X)$ 的定义为：对任意 $x\in A$，$F(x)=\{y\in X\mid xRy\Leftrightarrow y\in x^{-1}I\}$，其中 $I=\{0,1\}$ 且 $x^{-1}I=\{y\in X\mid y*(y*x)\in I\}$. 容易验证 $F(0)=F(1)=X$，$F(2)=\{0,1,3,4\}$，$F(3)=\{0,1,2,4\}$，且 $F(4)=\{0,1,2,3\}$ 都是 X 的子代数，因此 (F,A) 为 X 上的软 BCC-代数. 若定义集值函数 $G:A\to P(X)$ 如下：对任意 $x\in A$，有

$$G(x)=\{y\in X\mid xRy\Leftrightarrow y\in x^{-1}J\},$$

其中 $J=\{1\}$ 且 $x^{-1}J=\{y\in X\mid y*(y*x)\in J\}$，

那么 $G(1)=\{1\}$ 不是 X 子代数. 这就说明 X 上软集 (G,A) 不是 X 的软 BCC-代数.

例 2.2　设 A 是 BCC-代数 X 的模糊子代数,其隶属函数为 μ_A. 考虑关于函数 μ_A 的 α-水平子集族 $F(\alpha)=\{x\in X\mid \mu_A(x)\geq\alpha\}$,则 $F(\alpha)$ 为 X 的子代数. 如果已知族 F,能通过公式 $\mu_A(x)=\sup\{\alpha\in[0,1]\mid x\in F(\alpha)\}$ 获得 μ_A,这样每个模糊 BCC-子代数 A 都可视为软 BCC-代数 $(F,[0,1])$.

定理 2.1　设 (F,A) 为 X 上的一个软 BCC-代数,若 B 为 A 子集,则 $(F|_B,B)$ 为 X 上的一个软 BCC-代数.

证明　显然.

定理 2.2　设 (F,A) 和 (G,B) 都是 X 上的一个软 BCC-代数,如果 $A\cap B\neq\varnothing$,那么 $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ 也是 X 上的一个软 BCC-代数.

证明　由定义 1.3,记 $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)=(H,C)$,其中 $C=A\cup B$. 对任意 $x\in C$,有

$$H(x)=\begin{cases}F(x),\ \text{if } x\in A\backslash B,\\ G(x),\ \text{if } x\in B\backslash A,\\ F(x)\cap G(x),\ \text{if } x\in A\cap B.\end{cases}$$

注意到,$H:C\to P(X)$ 为一个集值映射,所以 (H,C) 为 X 上的一个软集. 因为 (F,A) 和 (G,B) 为 X 上的软 BCC-代数,所以当 $x\in A/B$ 时,$H(x)=F(x)$ 是 X 的一个 BCC-子代数;当 $x\in B/A$ 时,$H(x)=G(x)$ 也是 X 的一个 BCC-子代数;当 $x\in A\cap B$ 时,因子代数的交仍为子代数,故 $H(x)=F(x)\cap G(x)$ 为 X 的一个子代数.

综上所述,$(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ 是 X 上的一个软 BCC-代数.

推论 2.1　设 (F,A) 和 (G,A) 是 X 上的两个软 BCC-代数,则 $(F,A)\tilde{\cap}(G,A)$ 也是 X 上的软 BCC-代数.

定理 2.3　设 (F,A) 和 (G,B) 是 X 上的两个软 BCC-代数,如果 $A\cap B=\varnothing$,则 $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$ 也是 X 上的一个软 BCC-代数.

证明　由定义 1.4,记 $(F,A)\tilde{\cup}(G,B)=(H,C)$,其中 $C=A\cup B$. 对任意 $x\in C$,有

$$H(x)=\begin{cases}F(x),\ \text{if } x\in A\backslash B,\\ G(x),\ \text{if } x\in B\backslash A,\\ F(x)\cup G(x),\ \text{if } x\in A\cap B.\end{cases}$$

因 $A\cap B=\varnothing$,所有 $x\in C$,要么 $x\in A\backslash B$,要么 $x\in B\backslash A$. 如果 $x\in A\backslash B$,则依 (F,A) 为软 BCC-代数知,$H(x)=F(x)$ 为 X 的 BCC-子代数;当 $x\in B\backslash A$ 时,$H(x)=G(x)$ 也是 X 的 BCC-子代数. 综上所述,(H,C) 为 X 上的软 BCC-代数.

定理 2.4　设 (F,A) 和 (G,B) 是 X 上的两个软 BCC-代数,则 $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ 也是 X 上的一个软 BCC-代数.

证明　由定义 1.5,记 $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$,其中对任意 $(\alpha,\beta)\in A\times B$,有 $H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cap G(\beta)$. 因为 $F(\alpha)$ 和 $G(\beta)$ 都是 X 的 BCC-子代数,所以 $F(\alpha)\cap G(\beta)$ 也是 X 的 BCC-子代数,故对任意 $(\alpha,\beta)\in A\times B$,$H(\alpha,\beta)$ 是 X 的 BCC-子代数. 从而 $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)=(H,A\times B)$ 是 X 上的一个软 BCC-代数.

定义 2.2　称 X 的一个软 BCC-代数 (F,A) 是平凡的(全域的),如果对任意 $x\in A$,$F(x)=\{0\}$ $(F(x)=X)$.

设 $f:X\to Y$ 为 BCC-代数的映射. 对于 X 上的软集 (F,A),则 $(f(F),A)$ 为 Y 上的一个软集,其中 $f(F):A\to P(Y)$ 被定义为:对任意 $x\in A$,$f(F)(x)=f(F(x))$.

定理 2.5　设 $f:X\to Y$ 为 BCC-代数的同态映射,如果 (F,A) 为 X 上的一个软 BCC-代数,则 $(f(F),A)$ 为 Y 上的一个软 BCC-代数.

证明　因为 $F(x)$ 是 X 的一个 BCC-子代数,所以它的同态像是 Y 的 BCC-子代数. 进而,对任意 $x\in A$,$f(F)(x)=f(F(x))$ 为 Y 的 BCC-子代数,故 $(f(F),A)$ 是 Y 的软 BCC-代数.

定理 2.6　设 $f:X\to Y$ 为 BCC-代数的同态映射,且 (F,A) 是 X 上的软 BCC-代数,则下列结论成立:

(i) 若对任意 $x\in A$,有 $F(x)=\ker f$,则 $(f(F),A)$ 是 Y 上平凡的软 BCC-代数.

(ii) 如果 f 为满射且 (F,A) 是全域的,则 $(f(F),A)$ 是 Y 上全域的软 BCC-代数.

证明　(i) 因 $F(x)=\ker f$,所以对任意 $x\in A$,有 $f(F)(x)=f(F(x))=\{0_Y\}$. 由定义 2.2 和定理 2.5 知,$(f(F),A)$ 为 Y 上平凡的软 BCC-代数.

(ii) 因 f 为满射且 (F,A) 是全域的,则 $F(x)=X$ 对任意 $x\in A$ 成立,从而 $f(F)(x)=f(F(x))=f(X)=Y$ 对所有 $x\in A$ 成立. 依定理 2.5 和定义 2.2 知,$(f(F),A)$ 是 Y 上全域的软 BCC-代数.

定义 2.3　设 (F,A) 和 (G,B) 是 X 上的两个软 BCC-代数，称 (F,A) 为 (G,B) 的一个软 BCC-子代数，记为 $(F,A)\tilde{<}(G,B)$，如果它满足：(i) $A\subset B$，

(ii) 对任意 $x\in A$，$F(x)$ 都是 $G(x)$ 的 BCC-子代数.

例 2.3　设 (F,A) 为例 2.1 中 X 上的一个软 BCC-代数，$B=\{1,3,4\}$ 为 A 的子集，集值映射 $G:B\to P(X)$ 被定义为：对任意 $x\in B$，$G(x)=\{y\in X\mid xRy\Leftrightarrow y\in x^{-1}I\}$，其中 $I=\{0,1\}$ 且 $x^{-1}I=\{y\in X\mid y*(y*x)\in I\}$. 容易验证 $G(0)=X$，$G(3)=\{0,1,2,4\}$ 和 $G(4)=\{0,1,2,3\}$ 分别是 $F(0)$，$F(3)$ 和 $F(4)$ 的 BCC-子代数，所有 (G,B) 为 (F,A) 的一个软 BCC-子代数.

定理 2.7　设 (F,A) 和 (G,A) 是 X 上的两个软 BCC-代数，则下列结论成立：

(i)若对任意 $x\in A$，有 $F(x)\subset G(x)$，则 $(F,A)\tilde{<}(G,A)$.

(ii)若 $B=\{0\}$，且 (F,X) 和 (H,B) 都是 X 上的软 BCC-代数，则 $(H,B)\tilde{<}(F,X)$.

证明　显然.

推论 2.2　如果 (F,X) 是 X 上的一个软 BCC-代数，则 (F,X) 和 $(F,\{0\})$ 都是 (F,X) 的软 BCC-子代数.

定理 2.8　设 (F,A) 为 X 上的一个软 BCC-代数，而 (G_1,B_1) 和 (G_2,B_2) 都是 (F,A) 的软 BCC-子代数，则下列结论成立：

(i) $(G_1,B_1)\tilde{\cap}(G_2,B_2)\tilde{<}(F,A)$. (ii) $B_1\cap B_2=\varnothing\Rightarrow(G_1,B_1)\tilde{\cup}(G_2,B_2)\tilde{<}(F,A)$.

证明　(i) 由定义 1.3，可记 $(G_1,B_1)\tilde{\cap}(G_2,B_2)=(G,B)$，其中 $B=B_1\cup B_2$. 对任意 $x\in B$，$G(x)=G_1(x)$ 或 $G_2(x)$ 或 $G_1(x)\cap G_2(x)$. 显然，$B\subset A$. 令 $x\in B$，则 $x\in B_1/B_2$ 或 $x\in B_2/B_1$ 或 $x\in B_1\cap B_2$. 当 $x\in B_1/B_2$ 时，由 $(G_1,B_1)\tilde{<}(F,A)$ 知，$G(x)=G_1(x)$ 为 $F(x)$ 的 BCC-子代数；当 $x\in B_2/B_1$ 时，因 $(G_2,B_2)\tilde{<}(F,A)$ 知，$G(x)=G_2(x)$ 为 $F(x)$ 的 BCC-子代数；当 $x\in B_1\cap B_2$ 时，$G(x)=G_1(x)\cap G_2(x)$ 仍为 $F(x)$ 的 BCC-子代数. 综上所述，$(G_1,B_1)\tilde{\cap}(G_2,B_2)\tilde{<}(F,A)$.

(ii)由定义 1.4，可记 $(G_1,B_1)\tilde{\cup}(G_2,B_2)=(G,B)$，其中 $B=B_1\cup B_2$. 对任意 $x\in B$，有

$$G(x)=\begin{cases}G_1(x),\ \text{if } x\in B_1\backslash B_2,\\ G_2(x),\ \text{if } x\in B_2\backslash B_1,\\ G_1(x)\cup G_2(x),\ \text{if } x\in B_1\cap B_2.\end{cases}$$

因 $(G_i,B_i)\tilde{<}(F,A)$，$i=1,2$，则 $B=B_1\cup B_2\subset A$. 对任意 $x\in B_i$，$i=1,2$，$G_i(x)$ 为 $F(x)$ BCC-子代数. 由于 $B_1\cap B_2=\varnothing$，所以对任意 $x\in B$，要么 $x\in B_1\backslash B_2$，要么 $x\in B_2\backslash B_1$. 如果 $x\in B_1\backslash B_2$，则 $G(x)=G_1(x)$ 是 $F(x)$ 的 BCC-子代数；如果 $x\in B_2\backslash B_1$，则 $G(x)=G_2(x)$ 仍是 $F(x)$ 的 BCC-子代数，总之 $(G_1,B_1)\tilde{\cup}(G_2,B_2)\tilde{<}(F,A)$.

定理 2.9　设 (F,A) 是 X 上的一个软 BCC-代数，且 $\{(G_i,B_i):i\in I\}$ 是 (F,A) 的软 BCC-子代数的非空族，其中 I 为指标集，则下列结论成立：

(i) $\tilde{\bigcap}_{i\in I}(G_i,B_i)\tilde{<}(F,A)$. (ii) $\tilde{\bigwedge}_{i\in I}(G_i,B_i)\tilde{<}(F,A)$. (Ⅲ) 如果对任意 $i,j\in I$ 且 $i\neq j$，有 $B_i\cap B_j=\varnothing$，则 $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(G_i,B_i)\tilde{<}(F,A)$.

证明　证明是简单的，故略去.

定理 2.10　设 $f:X\to Y$ 为 BCC-代数的同态映射，若 (F,A) 和 (G,A) 是 X 上的软 BCC-代数，则 $(F,A)\tilde{<}(G,B)\Rightarrow(f(F),A)\tilde{<}(f(G),B)$.

证明　由 $(F,A)\tilde{<}(G,B)$ 知，$A\subset B$ 且 $F(x)$ 是 $G(x)$ 的 BCC-子代数. 因为 f 为同态映射，所以 $f(F)(x)=f(F(x))$ 为 $f(G(x))=f(G)(x)$ 的 BCC-子代数，故 $(f(F),A)\tilde{<}(f(G),B)$.

参考文献：

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8 (3) :338-353.

[2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets & Systems, 1986, 20(1):87-96.

[3] Gau W L, Buehrer D J. Vague sets [J]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614.

[4] Gorzalczany M B. A method of inference in approximate reasoning based on interval- valued fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets & Systems, 1987, 21(1):1-17.

[5] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Parallel Programming, 1982, 11(5): 341- 356.

[6] Molodtsov D. Soft set theory-First results [J]. Computers & Mathematics with Applications, 1999, 37(4/5):19-31.

[7] Maji P K, Biswas R, Roy A R. Soft set theory [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2003, 45

(4):555-562.

[8] Maji P K, Roy A R, Biswas R. An application of soft sets in a decision making problem [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2002, 44(8):1077-1083.

[9] Chen D, Tsang E C C, Yeung D S, et al. The parameterization reduction of soft sets and its applications [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2005, 49(5/6):757-763.

[10] Jun Y B, Xin X L. Fuzzy prime ideals and invertible fuzzy ideals in BCK-algebras [J]. Fuzzy Sets & Systems, 2001, 117(117): 471-476.

[11] Dudek W, Jun Y B, Stojakovi Z. On fuzzy ideals in BCC-algebras [J]. Fuzzy Sets & Systems, 2001, 123(2):251-258.

[12] Xu W, Ma J, Wang S, et al. Vague soft sets and their properties [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(2):787-794.

Soft BCC-algebras

PENG Jiayin

(School of Mathematics and Information Science, Neijiang Normal University, Neijiang, Sichuan 641199, China)

Abstract: The concepts of soft BCC-algebras and soft sub-algebras are introduced, and several examples are given to illustrate these concepts. Operations of soft BCC-algebras and soft sub-algebras like the intersection, union, "AND" and "OR" are established. The relations between these soft BCC-algebras and soft sub-algebras are investigated, and the properties of their homomorphic images are discussed.

Keywords: soft set; soft BCC-algebras; soft sub-algebras

(责任编辑:胡　蓉)